全品

教辅图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年创始人专注教育行业

全品高考

第二轮专题

AI智慧教辅

The Second Quan-pin Subject Study

数学

作业手册

主编 肖德好

本书为AI智慧教辅

“讲题智能体”支持学生聊着学，扫码后哪题不会选哪题；随时随地想聊就聊，想问就问。

沈阳出版发行集团
沈 阳 出 版 社

CONTENTS 目录

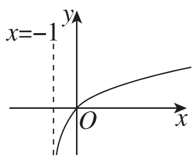
基础过关

1. [2025·四川石室中学二模] 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=2^{x}-3$，则 $f(-2)=$ （　　）

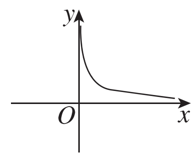
A. 1　　B. $\frac{1}{4}$

C. -1　　D. $-\frac{11}{4}$

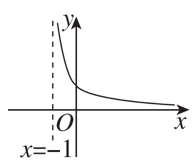
2. 函数 $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$ 的图象大致为（　　）



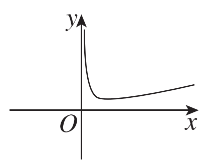
A



B



C



D

3. [2023·新课标Ⅱ卷] 若 $f(x)=(x+a)\ln\frac{2x-1}{2x+1}$ 为偶函数，则 $a=$ （　　）

A. -1　　B. 0

C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

4. [2023·新课标Ⅰ卷] 设函数 $f(x)=2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减，则 a 的取值范围是 （　　）

A. $(-\infty,-2]$　　B. $[-2,0)$

C. $(0,2]$　　D. $[2,+\infty)$

5. [2025·湖南邵阳二模] 已知函数 $f(x)=3x^{3}-\sin x+x$，则满足 $f(x)+f(4-3x)<0$ 的 x 的取值范围是 （　　）

A. $(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,1)$

C. $(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,2)$

6. [2025·江西九江二模] 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上周期为 2 的偶函数，且当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=\frac{1}{x+1}-\sin x$. 若 $a=f\left(\frac{1}{2}\right)$，$b=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，$c=f\left(-\frac{11}{4}\right)$，则 a,b,c 的大小关系是 （　　）

A. $b<a<c$　　B. $c<a<b$

C. $c<b<a$　　D. $a<c<b$

7. [2025·广东深圳二模] 已知函数 $f(x)=ae^{x}-e^{-x}$（a 为常数），则下列命题为真命题的是 （　　）

A. $\forall a\in\mathbf{R}$，$f(x)$ 为奇函数

B. $\exists a\in\mathbf{R}$，$f(x)$ 为偶函数

C. $\forall a\in\mathbf{R}$，$f(x)$ 为增函数

D. $\exists a\in\mathbf{R}$，$f(x)$ 为减函数

8. （多选题）已知函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$，则下列结论正确的是 （　　）

A. $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$

B. $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$

C. $f(x)$ 是奇函数

D. $f(x)$ 在 $\left(\frac{2}{\pi},+\infty\right)$ 上单调递减

9. (多选题)[2025·重庆一中模拟] 已知对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+y)=f(x-y)+2f(y)$，$f(1)=1$，且当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，则下列结论正确的是 ( )

A. $f(3)=3$

B. $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减

C. 关于 x 的不等式 $f(x^2-x-2)>4$ 的解集是 $(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$

D. $f(2^n x)=2^n f(x)$

10. 已知 $f(x)=2^{|x|}+x^2$，若 $f(a)<3$，则实数 a 的取值范围为________.

11. [2025·南通模拟] 已知函数 $f(x)$及其导函数 $f'(x)$的定义域均为 $\mathbf{R}$，记 $g(x)=f'(x)$. 若 $f(x)$是奇函数，且 $f(x)+2g(x)=e^{ax}$，则 $a=$________.

12. [2025·昆明二模] 已知 $f(x)=x^3-3x$，$A(-1,f(-1))$，$B(2,f(2))$，且点 C，D 在 $f(x)$ 的图象上，若四边形 $ABCD$ 为平行四边形，则四边形 $ABCD$ 的面积为________.

能力提升

13. [2025·山东德州三模] 已知函数 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数，且 $f(x+1)-2$ 为奇函数，若对任意的 $a\in[-3,2]$，不等式 $f(2a+t)+f(a^2-1)\leqslant 4$ 恒成立，则实数 t 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,-5]$　　B. $(-\infty,0]$

C. $[0,+\infty)$　　D. $[-5,+\infty)$

14. (多选题)[2025·烟台三模] 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$的导函数为 $f'(x)$，若对任意的 x，$y\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+y)-f(x-y)=2f(1-x)f(y)$，且 $f(1)=1$，则 ( )

A. $f(x)$为偶函数

B. $f'(0)+f'(2)=0$

C. 4 为 $f'(x)$的一个周期

D. $[f(x)]^2+[f(1-x)]^2=1$

15. (多选题)[2025·湖南邵阳三模] 已知函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=f(x)$，$f(x-2)=-f(-x)$，当 $x\in[0,1]$时，$f(x)$单调递减，则下列说法正确的是 ( )

A. 函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=-1$ 对称

B. 函数 $f(x-1)$为奇函数

C. $\sum_{n=1}^{2025} f(n)=0$

D. $f\left(\log_3 \frac{4}{81}\right)>f(\log_4 5)$

16. [2025·湖北鄂东南联盟联考] 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$是奇函数，且在$[0,+\infty)$上单调递增，若对$\triangle ABC$ 的某个内角 θ，不等式 $f(\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta)-f(1-m)>0$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是________.

基础过关

1. $\sqrt[6]{(3-\pi)^6}+\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}-2^{2\log_2\frac{3}{2}}=$ （　　）

A. $\pi+\frac{3}{2}$　　B. $\frac{15}{2}-\pi$

C. $3-\pi$　　D. $\pi-3$

2. $\ln a<\ln b$”是“$a<b$”的 （　　）

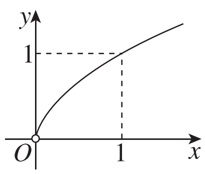
A. 充分不必要条件

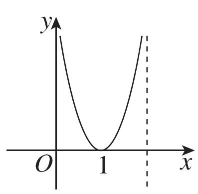
B. 必要不充分条件

C. 充要条件

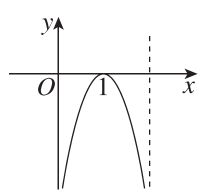
D. 既不充分也不必要条件

3. ［2025·福州二模］若函数$f(x)=x^a$，$x\in(0,+\infty)$的图象如图所示，则函数$g(x)=\log_a x+\log_a(2-x)$的图象大致为 （　　）

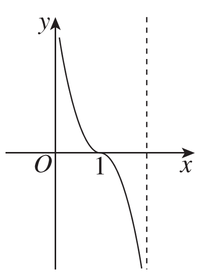




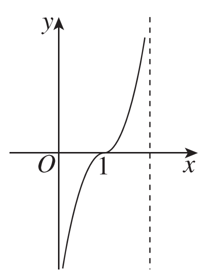
A



B



C



D

4. 若$abc\neq0$，且$3^a=4^b=6^c$，则 （　　）

A. $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$　　B. $\frac{1}{c}=\frac{2}{a}+\frac{2}{b}$

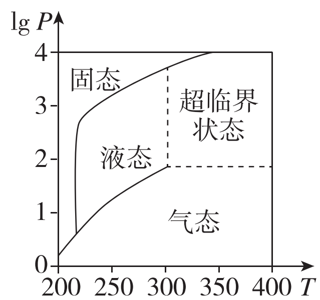
C. $\frac{2}{c}=\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$　　D. $\frac{2}{c}=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$

5. ［2025·北京卷］在一定条件下，某人工智能语言模型训练N个单位的数据量所需要时间$T=k\log_2 N$(单位：小时)，其中k为常数，在此条件下，已知训练数据量N从10^6个单位增加到1.024×10^9个单位时，训练时间增加20小时，则当训练数据量N从1.024×10^9个单位增加到4.096×10^9个单位时，训练时间增加(单位：小时) （　　）

A. 2　　B. 4

C. 20　　D. 40

6. 在北京冬奥会上，国家速滑馆“冰丝带”使用高效环保的二氧化碳跨临界直冷制冰技术，为实现绿色冬奥作出了贡献. 如图描述了一定条件下二氧化碳所处的状态与T和$\lg P$的关系，其中T表示温度，单位是K；P表示压强，单位是bar. 下列结论中正确的是 （　　）



A. 当$T=220$，$P=1026$时，二氧化碳处于液态

B. 当$T=270$，$P=128$时，二氧化碳处于气态

C. 当$T=300$，$P=9987$时，二氧化碳处于超临界状态

D. 当$T=360$，$P=729$时，二氧化碳处于超临界状态

7. ［2025·杭州二模］定义“真指数”$e_+^x=\begin{cases}1,x<0,\\ e^x,x\geq0\end{cases}$(e为自然对数的底数)，则 （　　）

A. $e_+^{x_1+x_2}=e_+^{x_1}\cdot e_+^{x_2}$　　B. $e_+^{x_1-x_2}=\frac{e_+^{x_1}}{e_+^{x_2}}$

C. $e_+^{x_1}+e_+^{x_2}\geq2e_+^{\frac{x_1+x_2}{2}}$　　D. $e_+^{x_1x_2}\leq(e_+^{x_1})^{x_2}$

8. (多选题)[2025·湖北孝感三模] 已知函数 $f(x)=\log_a|x-1|$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上单调递增,则 ( )

A. $0<a<1$

B. $a>1$

C. $f(a+2024)>f(2025)$

D. $f(a+2024)<f(2025)$

9. (多选题)[2024·湖南怀化二模] 已知函数 $y=x+e^x$ 的零点为 x_1, $y=x+\ln x$ 的零点为 x_2,则 ( )

A. $x_1+x_2>0$

B. $x_1x_2<0$

C. $e^{x_1}+\ln x_2=0$

D. $x_1x_2-x_1+x_2>1$

10. [2025·湖南邵阳三模] 已知减函数 $f(x)=a^x$ $(a>0$,且 $a\neq1)$ 的图象过点 (m,n),且 m,n 是方程 $(\log_2 x)^2+3\log_2 x-4=0$ 的两个实数根,则 $f(-1)$ 的值为________.

11. [2025·河南部分学校模拟] 对于任意两个正数 $u,v(u<v)$,记曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $x=u$, $x=v$ 及 x 轴围成的曲边梯形的面积为 $L(u,v)$,并约定 $L(u,v)=-L(v,u)$,德国数学家莱布尼茨最早发现 $L(1,x)=\ln x$.若 $u=\frac{1}{e}$, $v=e$,则围成的曲边梯形的面积为________.

12. 若对任意 $x\in[2,+\infty)$ 和任意 $a\in\left[\frac{1}{3},2\right]$,都有 $2^{-x}-2^x\leqslant a^m+x^2-4x$ 成立,则实数 m 的取值范围________.

能力提升

13. 已知函数 $y=3^x$ 的图象上不同的两点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 到直线 $y=\frac{1}{3}$ 的距离相等,则 ( )

A. $x_1x_2<0$

B. $x_1+x_2<-2$

C. $y_1y_2>\frac{1}{9}$

D. $y_1+y_2<2\times3^{\frac{x_1+x_2}{2}}$

14. (多选题)已知正数 a,b 满足 $8^a-\log_3 b=2^b-\log_3 a$,则 ( )

A. $3a>b$　　B. $3a<b$

C. $a^{-3}<27b^{-3}$　　D. $3a<b+1$

15. (多选题)任何一个正实数 R 都可以表示成 $R=m\times10^k$ $(1\leqslant m<10, k\in\mathbf{Z})$,定义:$\Omega(R)=\begin{cases}R\text{ 的整数部分的位数}, k\geqslant0,\\ R\text{ 的非有效数字 0 的个数}, k<0,\end{cases}$ 比如 $\Omega(1.2\times10^2)=3$, $\Omega(1.23\times10)=2$, $\Omega(3.001\times10^{-1})=1$,则下列说法正确的是 ( )

A. 当 $k>0$, $M>1$, $N>1$ 时,$\Omega(M\cdot N)=\Omega(M)+\Omega(N)$

B. 当 $k<0$, $N>0$ 时,$\Omega(N)=-k$

C. 若 $N=2^{100}$, $\lg 2\approx0.301$,则 $\Omega(N)=31$

D. 当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,$\Omega(2^n)=\Omega(2^{-n})$

16. 已知函数 $f(x)=(x-a)^3\ln\frac{x+b}{x}$ 满足 $f(2-x)=f(x)$,则 $(2025b)^a=$________.

基础过关

1. 若集合 $A=\left\{x\left|y=\sqrt{\dfrac{x+1}{2-x}}\right.\right\}$，$B=\{y\mid y=x^2+1\}$，则 $A\cap B=$ （　）

A. $[-1,2)$　B. $[-1,+\infty)$

C. $[1,2)$　D. $[1,+\infty)$

2. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$，则下列说法中正确的是 （　）

A. 若 $ab=1$，则 $a+b\geqslant 2$

B. 若 $a>b$，则 $\tan a-\tan b>0$

C. 若 $a>b$，则 $\ln(a-b)>0$

D. 若 $a>b>0$，则 $a+\dfrac{1}{b}>b+\dfrac{1}{a}$

3. 已知 $x<-1$，则 $4x+\dfrac{1}{x+1}$ 的最大值为 （　）

A. -4　B. 0　C. 4　D. -8

4. [2025·北京卷] 已知 $a>0,b>0$，则 （　）

A. $a^2+b^2>2ab$　B. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geqslant\dfrac{1}{ab}$

C. $a+b>\sqrt{ab}$　D. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$

5. 下列函数中最小值为 4 的是 （　）

A. $y=x^2+2x+4$

B. $y=|\sin x|+\dfrac{4}{|\sin x|}$

C. $y=2^x+2^{2-x}$

D. $y=\ln x+\dfrac{4}{\ln x}$

6. 对任意的 $x\in[1,2]$，不等式 $ax^2-2x+3a<0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是 （　）

A. $\left(-\infty,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$　B. $\left(-\infty,\dfrac{4}{7}\right)$

C. $\left(\dfrac{4}{7},+\infty\right)$　D. $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$

7. [2025·河南新乡二模] 已知随机变量 $X\sim N(1,\sigma^2)$，$P(X\leqslant a)+P(X\leqslant b)=1(a>0,b>0)$，则 $\dfrac{ab}{a+4b}$ 的最大值为 （　）

A. 9　B. $\dfrac{1}{9}$　C. $\dfrac{9}{2}$　D. $\dfrac{2}{9}$

8. (多选题)设 a,b,c,d 为实数，且 $a>b>0>c>d$，则下列不等式正确的有 （　）

A. $c^2<cd$　B. $a-c<b-d$

C. $ac<bd$　D. $\dfrac{c}{a}-\dfrac{d}{b}>0$

9. (多选题)[2025·夷陵中学模拟] 若正实数 a,b 满足 $2a+b=1$，则下列结论正确的是 （　）

A. $2ab$ 的最大值为 $\dfrac{1}{4}$

B. a^2+b^2 的最小值为 $\dfrac{1}{4}$

C. $\sqrt{2a}+\sqrt{b}$ 的最大值为 $\sqrt{2}$

D. $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为 9

10. [2025·潍坊二模] 已知 $|x-1|+|x+a|\geqslant 4$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是________.

11. 已知函数 $f(x)=|\lg x|$，若 $f(a)=f(b)(a\neq b)$，则当 $2^a\cdot 3^b$ 取得最小值时，$\dfrac{a}{b}=$________.

12. [2025·湖南“一起考”一联] 已知 $f(x)=x+\dfrac{c+4}{x}$，若 $f(x)=b$ 在 $[-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{7}]$ 上有解，则 b^2+c^2 的最小值是________.

能力提升

13. (多选题)[2022·新高考全国Ⅱ卷] 若实数 x,y 满足 $x^2+y^2-xy=1$，则 （　）

A. $x+y<1$　B. $x+y\geqslant -2$

C. $x^2+y^2\geqslant 2$　D. $x^2+y^2\leqslant 2$

14. (多选题)[2025·河南南阳模拟] Cobb-Douglas 生产函数是宏观经济学和微观经济学中最常用的生产函数之一，函数的数学形式为 $Y=AK^{\alpha}L^{\beta}$ $(A>0,K>0,L>0,0<\alpha<1,0<\beta<1)$，其中 Y 是总产出，K 是资本存量，L 是劳动力，A 是技术参数，α,β 是资本和劳动的产出弹性. 当 A 不变时，下列说法正确的是 （　）

A. 若 K 与 L 均变为原来的 $m(m>0)$ 倍，且 $\alpha+\beta=1$，则 Y 变为原来的 m 倍

B. 若 K 与 L 均变为原来的 $m(m>1)$ 倍，且 $\alpha\beta=\dfrac{1}{4}$，则 Y 最少可变为原来的 m 倍

C. 若 K 与 L 均变为原来的 $m(m>1)$ 倍，且 $\alpha^2+\beta^2=\dfrac{1}{2}$，则 Y 最少可变为原来的 m 倍

D. 若 α,β,L 均不变，则函数 $Y=AK^{\alpha}L^{\beta}$ 的增长速度越来越慢

15. $\sin x\sqrt{1+2\cos^2 x}$ 的最小值为________.

基础过关

1. 曲线 $y=e^x$ 在点$(2,e^2)$处的切线与坐标轴所围三角形的面积为 ( )

A. $\frac{9}{4}e^2$　B. $2e^2$

C. e^2　D. $\frac{e^2}{2}$

2. ［2023·新课标Ⅱ卷］已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x$ 在区间$(1,2)$单调递增，则 a 的最小值为 ( )

A. e^2　B. e　C. e^{-1}　D. e^{-2}

3. ［2025·江西萍乡三模］已知 x,y 为实数，设甲：$y>x>0$；乙：$x-\cos y<y-\cos x$，则甲是乙的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 若函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-a\cos x$ 在$(0,\pi)$上单调递增，则 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,-1]$　B. $[-1,+\infty)$

C. $(-\infty,1]$　D. $[1,+\infty)$

5. 若曲线 $y=x^3+2x$ 在点$(1,3)$处的切线也与曲线 $y=x^2+x+m$ 相切，则 $m=$ ( )

A. 4　B. -2　C. -4　D. 2

6. ［2025·浙江台州二模］已知 $a\in\mathbf{R}$，若函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}-\ln x$ 既有极大值又有极小值，则 a 的取值范围是 ( )

A. $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$　B. $\left(0,\frac{1}{4}\right)$

C. $\left(-\frac{1}{4},0\right)$　D. $\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$

7. ［2025·山东菏泽二模］已知函数 $f(x)=(x-a-1)e^x-bx\left(\frac{x}{2}-a\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 $b-a$ 的最小值为 ( )

A. 0　B. 1　C. $\frac{1}{e}$　D. e

8. （多选题）已知函数 $f(x)=ax(x-b)^2$，且 $a<0$，$b\in\mathbf{R}$，则下列结论正确的有 ( )

A. $f(x)$不一定有极值

B. 当 $b>0$ 时，$f(a)<f(a+b)$

C. 当 $b<0$ 时，$f(x)$的极小值为 0

D. 当 $b=3$ 时，$f(x)$在区间$[a,3]$上的最小值为 $4a$

9. （多选题）［2025·合肥一中模拟］设函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x-a$ 有三个不同的零点，从小到大依次为 x_1,x_2,x_3，则 ( )

A. $-27<a<5$

B. 函数 $y=f(x)+a$ 的图象的对称中心为点$(1,-11)$

C. 过点$(x_1,f(x_1))$引曲线 $y=f(x)$的切线，有且仅有 1 条

D. 若 x_1,x_2,x_3 成等差数列，则 $a=-11$

10. ［2025·全国一卷］若直线 $y=2x+5$ 是曲线 $y=e^x+x+a$ 的切线，则 $a=$________.

11. ［2025·四川成都三诊］若函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x,x\leqslant 0,\\x^3-3x+a,x>0\end{cases}$ 的值域为$[-1,+\infty)$，则实数 a 的取值范围是________.

12. 已知函数 $f(x)=x^2+m$，$g(x)=2n\ln x$，若曲线 $y=f(x)$与 $y=g(x)$在 $x=1$ 处有相同的切线，则函数 $F(x)=f(x)-g(x)$的最小值为________.

能力提升

13. ［2025·浙江天域名校协作体5月联考］给定非空数集 M，若函数 $f(x)$满足：对任意 $x,y\in M$，存在实数 $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，使得 $|f(x)-f(y)|\leqslant\alpha|x-y|$成立，则称 $f(x)$为“半压缩函数”. 已知 $M=\left\{x\middle|0<x<\frac{1}{2}\right\}$，则下列四个函数中为“半压缩函数”的是 ( )

A. $f(x)=x^2$

B. $f(x)=\sqrt{x}$

C. $f(x)=\cos x+1$

D. $f(x)=\ln(x+1)$

14. ［2025·山东齐鲁名校协作体模拟］已知 $0<b<1$，若 $e^a+\ln b=\frac{1}{b^2}-a$，则 ( )

A. $a>b^{-1}$　B. $a>b^{-2}$

C. $e^a<b^{-1}$　D. $e^a<b^{-2}$

15. 已知函数 $f(x)=|e^x-1|$，$x_1<0$，$x_2>0$，函数 $f(x)$的图象在点 $A(x_1,f(x_1))$和点 $B(x_2,f(x_2))$处的两条切线 l_1,l_2 互相垂直，且 l_1 与 y 轴交于点 M，l_2 与 y 轴交于点 N，则$\frac{|AM|}{|BN|}$的取值范围是________.

限时集训（五） 微专题5 函数零点

基础过关

1. 函数 $f(x)=x^3-12x+16$ 的零点个数是 ( )

A. 0 B. 1

C. 2 D. 3

2. [2025·河南许平汝名校二模] 若函数 $f(x)=2x^3-3x^2-a$ 在区间 $(1,2)$ 内仅有一个零点，则 a 的取值范围为 ( )

A. $(2,3)$ B. $(0,1)$

C. $(-1,4)$ D. $(-1,0)$

3. 函数 $f(x)=(x^2-x)\ln|2x-3|$ 在区间 $[-2,2]$ 上的零点个数是 ( )

A. 3 B. 4

C. 5 D. 6

4. [2025·四川成都三模] 已知函数 $f(x)=2x-m-\ln x$ 有且只有一个零点，则 m 的值是 ( )

A. $1-\ln 2$ B. $1+\ln 2$

C. $\ln 2$ D. $-\ln 2$

5. [2023·全国乙卷] 函数 $f(x)=x^3+ax+2$ 存在3个零点，则 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,-2)$ B. $(-\infty,-3)$

C. $(-4,-1)$ D. $(-3,0)$

6. (多选题)已知 $x>0$，$a>0$，且 $a\neq1$，函数 $f(x)=a^x-x^a$，则 ( )

A. 当 $a=\mathrm{e}$ 时，$f(x)\geqslant0$ 恒成立

B. 当 $a>\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 有两个零点

C. 当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 有且仅有1个零点

D. 存在 $a>1$，使得 $f(x)$ 存在三个极值点

7. (多选题)[2025·江西南昌模拟] 已知函数 $f(x)=x^2+ax\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{2x}$ 恰有3个零点，则 a 的值可以为 ( )

A. $\dfrac{11}{4}$ B. $\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

C. $\mathrm{e}-\dfrac{1}{3}$ D. e

8. [2025·广东深圳二模] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, x\leqslant0,\\ x\ln x, x>0,\end{cases}$ 若 $f(a)=\mathrm{e}$，则实数 $a=$________.

9. 已知函数 $f(x)=|\lg x|-kx-2$，给出下列四个结论：

①若 $k=0$，则 $f(x)$ 恰有2个零点；

②存在负数 k，使得 $f(x)$ 恰有1个零点；

③存在负数 k，使得 $f(x)$ 恰有3个零点；

④存在正数 k，使得 $f(x)$ 恰有3个零点.

其中所有正确结论的序号是________.

10. 已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^x-x$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

能力提升

11. (多选题)已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-a\sin x$，$a\in\mathbf{R}$,则下列结论正确的是 ( )

A. 当 $a=1$ 时,$f(x)$的图象在点$(0,f(0))$处的切线方程为 $y=0$

B. 当 $a=1$ 时,$f'(x)$在$\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$上存在唯一极大值点 x_0

C. 存在 a,使得 $f(x)$有且仅有 2 个零点

D. 存在 a,使得 $f(x)$有且仅有 1 个零点

12. [2025·浙江嘉兴二模] 已知函数 $f(x)=\ln x+ax(a>0)$,若方程 $f[f(x)]=x$ 在区间$[2,4]$上有解,则实数 a 的取值范围为________.

13. [2025·齐鲁名校联考] 已知 $a,b\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)=x-ax^2e^x+b$.

(1)若 $a=1,b=-1$,求曲线 $y=f(x)$在点$(-2,f(-2))$处的切线方程;

(2)若 $a>0,g(x)=f'(x)$,求 $g(x)$的单调区间;

(3)若对任意 $b\in\mathbf{R}$,$f(x)$至多有 2 个零点,求 a 的取值范围.

14. 已知函数 $f(x)=e^x-\ln(x+m)$.

(1)设 $x=0$ 是 $f(x)$的极值点,求 m,并讨论 $f(x)$的单调性;

(2)当 $m\leqslant 2$ 时,证明 $f(x)>0$.

基础过关

1. ［2025·广州三模］若不等式 $e^x \geqslant kx$（$e=2.71828\cdots$为自然对数的底数）对任意实数 x 恒成立，则实数 k 的最大值为（　）

A. 0　B. 1　C. e　D. e^2

2. 函数 $f(x)=\ln x-mx+1$，若存在 $x\in(0,+\infty)$，使 $f(x)\geqslant 0$ 有解，则 m 的取值范围为（　）

A. $(-\infty,1]$　B. $(-\infty,2]$

C. $[1,+\infty)$　D. $[2,+\infty)$

3. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-ax+\ln x$，$a\in\mathbf{R}$. 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，且 $f(x_1)+f(x_2)<\lambda(x_1+x_2)$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围为（　）

A. $\left[-\frac{3}{2},+\infty\right)$　B. $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$

C. $[-\sqrt{2},+\infty)$　D. $[\sqrt{2},+\infty)$

4. 已知 $a>1$，关于 x 的不等式 $a^x\geqslant x^3$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，则 a 的最小值为________.

5. 设函数 $f(x)=(x-1)(e^x-e)$，$g(x)=x-\ln x+a$，若对任意的 $x_2\in(0,+\infty)$，总存在 $x_1\in\mathbf{R}$，使得 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$，则实数 a 的取值范围是________.

6. 设函数 $f(x)=x+\ln x$，$g(x)=x+e^x$，若存在 x_1,x_2，使得 $g(x_1)=f(x_2)$，则 $|x_1-x_2|$ 的最小值为________.

7. ［2025·江苏苏州八校三模］已知函数 $f(x)=e^x-ax-1$.

(1)当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的最小值；

(2)若 $f(x)\geqslant x^2$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

8. ［2025·沈阳二模］已知函数 $f(x)=\ln x-kx$.

(1)若存在 $x\in(0,+\infty)$，使 $f(x)\geqslant 0$ 成立，求 k 的取值范围；

(2)若 $k>0$，关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant\frac{6}{kx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求 k 的最小值.

能力提升

9. [2025·江苏南通二模] 已知函数 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,$f'(x)$是 $f(x)$的导函数,$f(x)+f'(x)=2e^x$,若 $k[f(x)-e^x]\leqslant x$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,则实数 k 的取值范围是 ( )

A. $\left(-\infty,-\frac{1}{e}\right]$　　B. $\left(-\frac{1}{e},0\right)$

C. $(-\infty,-1]$　　D. $[-1,0)$

10. 已知函数 $f(x)$满足 $f(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)x+\frac{1}{2}x^2$.

(1)求 $f(x)$的解析式及单调区间;

(2)若 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^2+ax+b$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,求$(a+1)b$ 的最大值.

11. 已知函数 $y=f(x)$的图象在定义域 $\mathbf{R}$ 上连续不断,$f(-x)=f(x)$,$f(x)+f(2-x)=0$,$f(x)$在区间$[0,2]$上单调递减,$f'(x)$是 $f(x)$的导数.

(1)证明:$f(x)$是周期函数.

(2)给定 $t\in(0,2)$,设 $a\in\mathbf{R}$,证明:存在 $k\in[a-t,a+t]$,使得 $f(k)\leqslant f(t)$.

(3)若 $f'(x)=\frac{\pi}{2}f(x+1)$,$f(0)<\sqrt{2}$,$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$,设函数 $F(x)=3f(x)-f(3x)$.

(i)求 $F(x)$的最大值;

(ii)若存在 $\theta\in\mathbf{R}$,使得 $3f(x)-f(3x+\theta)\leqslant b$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,求实数 b 的最小值.

基础教育行业专研品牌 全品 30+年创始人专注教育行业

提能特训（一） 与零点、极值点有关的证明

时间 45分钟

基础过关

1. [2025·西安二模] 已知函数 $f(x)=x\ln x-x$.

(1)若 $f(x)\geqslant mx-e^2$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立,求实数 m 的取值范围;

(2)若 x_0 是函数 $h(x)=f(x)+x^2$ 的极值点,求证:$f(x_0)+3x_0>0$.

2. [2025·烟台三模] 已知函数 $f(x)=\ln x+ax-\dfrac{a}{x}(a<0)$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性;

(2)若 $f(x)$存在两个极值点 x_1,x_2,且 $x_2\geqslant 2x_1$,求 $f(x_1)-f(x_2)$的最大值.

3. [2025·邵阳二模] 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{e^{x-1}}$,$g(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$.

(1)求 $f(x)$的极值;

(2)当 $0<x<1$ 时,证明:$f(x)>g(x)$;

(3)当 $F(x)=(be^{x-1}-x)(1+\ln x-bx)$恰有四个零点 $x_1,x_2,x_3,x_4(0<x_1<x_2<x_3<x_4)$时,证明:$x_1x_4=x_2x_3$.

能力提升

4. [2025·四省二联] 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+(2-a)x^2-ax+1$.

(1)若 $a=3$,求 $f(x)$的极值.

(2)若 $a>1$ 且 $b>-1$,关于 x 的方程 $f(x)+xe^x+b+\frac{1}{2}(a-3)x^2=0$ 在$(0,+\infty)$上仅有一个实数根 x_0.

(i)证明:$a=e^{x_0}+x_0$;

(ii)求 $4a-b$ 的最大值.

5. [2025·长沙长郡中学一模] 已知函数 $f(x)=\frac{x\ln x}{a\ln x-1}(0<a<1)$.

(1)求 $f(x)$的定义域;

(2)求证:无论 a 取何值,$f(x)$都有两个极值点;

(3)设 $f(x)$的极大值点为 x_1,极小值点为 x_2,求证:$f(x_1)+f(x_2)>2\sqrt{e}$.

提能特训（二） 对含有 $\ln x$，e^x 的不等式证明

时间 45分钟

基础过关

1. ［2025·河北秦皇岛三模］设函数 $f(x)=(x-2)\ln x+1$.

(1)求 $f(x)$的图象在点$(1,f(1))$处的切线方程；

(2)证明：$f(x)+e^x>x+1$.

2. ［2025·长春模拟］已知函数 $f(x)=\ln x-ax+1$.

(1)若 $f(x)\leqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

(2)证明：当 $x\geqslant 1$ 时，$e^x>x+1+2x\ln x$.

3. [2025·武汉四月调考] 已知函数 $f(x)=e^x-\frac{\ln x}{x}+\frac{a}{x}-1$.

(1)若 $f(x)$的图象在点$(1,f(1))$处的切线斜率为-1,求 a 的值;

(2)若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立,求 a 的取值范围.

能力提升

4. [2025·江西六校二模] 已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2-x+1(a\in\mathbf{R})$.

(1)若函数 $f(x)$在定义域上单调递增,求 a 的取值范围;

(2)若 $a=0$,证明:$f(x)<\frac{4e^{x-2}-x^2}{x^2}$;

(3)设 $x_1,x_2(x_1<x_2)$是函数 $f(x)$的两个极值点,证明:$f(x_1)-f(x_2)<\left(2a-\frac{1}{2}\right)(x_1-x_2)$.

提能特训（三） 导数与数列交汇问题

时间 45分钟

基础过关

1. 已知函数 $f(x)=e^x-x$.

(1)求证：当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant \frac{1}{2}x^2+1$；

(2)求证：$f(1)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n}\right)>n+\frac{n}{2n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

2. 已知函数 $f(x)=-x^3+mx$ 在$(0,1)$上单调递增，实数 m 的取值集合为 A.

(1)求集合 A；

(2)当 m 取集合 A 中元素的最小值时，定义数列$\{a_n\}$满足 $a_1=4$，且 $a_n>0$，$a_{n+1}=\sqrt{-3f'(a_n)+9}-2$，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(3)在(2)的条件下，若 $b_n=n(a_n-1)$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

能力提升

3. 不动点在数学的应用中具有重要作用，不动点是指被函数映射到其自身的点. 对于函数 $f(x)$，我们把满足 $f(a)=a$ 的 a 称为函数 $f(x)$ 的不动点，已知函数 $f(x)=x^3-x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$.

(1)证明：$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上有唯一的不动点 x_0.

(2)已知 $x_1=0$，$x_{n+1}=f(x_n)$，$y_1=\frac{1}{2}$，$y_{n+1}=f(y_n)$，$a_n=y_n-x_n$，且 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$n\in\mathbf{N}^*$. 证明：

①$\{x_n\}$ 为递增数列，$\{y_n\}$ 为递减数列，且 $y_n>x_n$；

②$S_n\leqslant 1-\frac{1}{2^n}$.

4. [2025·山西运城模拟] 已知函数 $f(x)=ax^2-\ln x(a>0)$.

(1)设直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的任意一条切线，若 $kb\leqslant 0$，求 a 的值；

(2)证明：存在 $r>0$，对任意的 $0<s<t$，且 $s+t\leqslant 2r$，都有 $f(s)>f(t)$；

(3)证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{2^i+i}{2^i-i}>2-\frac{n+1}{2^{n-1}}$.